スタディーサポート

2010年度 3年生 第1回

学力リサーチ

数学α

解答・解説

組	番	名前

※この冊子は再生紙を使用しています。

Dα

01431181

解答一覧

解答を確認しよう!

このスタディーサポートは，あなたの**数学**の学力を効果的に上げる方法を見つけるための教材です。まず，下の表で正解を確認し，どの問題ができていなかったかを把握しましょう。また，全部でどのくらいできていたかを，自己採点してみましょう。

大問番号	解答番号	正解	あなたの解答	正誤	備考
1 公式理解	ア	3			
	イ	3			
	ウ	2			
	エ	4			
	オ	2			
	カ	3			
	キ	3			
	ク	4			
	ケ	1			
	コ	3			
	サ	2			
	シ	2			
	ス	3			
	セ	4			
	ソ	2			
	タ	3			
	あなたの正解数 問／16問				
2 公式理解	ア	2	2	○	
	イ	4	4	○	
	ウ	2	2	○	
	エ	3	1	×	
	オ	4	4	○	
	カ	3	3	○	
	キ	2	2	○	
	ク	3	3	○	
	ケ	4	4	○	
	コ	2	1	×	
	サ	1	1	○	
	シ	1	2	×	
	ス	4	3	×	
	セ	2	4	×	
	ソ	3	3	○	
	タ	3	3	○	
	あなたの正解数 11問／16問				
3 公式利用	ア	9			完解
	イ	3			
	ウ	2			完解
	エ	4			
	オ	8			
	カ	—			完解
	キ	3			
	ク	2			
	ケ	9			
	コ	7			完解
	サ	4			
	シ	—			完解
	ス	1			
	セ	5			
	ソ	3			完解
	タ	2			
	チ	3			
	ツ	3			
	あなたの正解数 問／10問				

大問番号	解答番号	正解	あなたの解答	正誤	備考
4 公式利用	ア	2	4	×	完解
	イ	4	7		
	ウ	8	8	○	
	エ	—		×	完解
	オ	3			
	カ	2			
	キ	9	2	×	
	ク	3	3	○	
	ケ	3	3	○	
	コ	4	2	×	完解
	サ	8	4		
	シ	0	0		
	ス	4	1	×	完解
	セ	5	5		
	ソ	5	2		
	タ	6	8		
	チ	4	4	○	完解
	ツ	0	0		
	テ	4	2	×	
	あなたの正解数 4問／10問				
5 応用力	ア	2	2	○	完解
	イ	—	—		
	ウ	4	4		
	エ	6	6		
	オ	3	4	×	完解
	カ	2	3		
	キ	5	3	×	完解
	ク	2	4		
	ケ	3	1	×	完解
	コ	5	2		
	サ	2	2		
	シ	8	8	○	
	ス	1	2	×	完解
	セ	6	2		
	ソ	1	1		
	タ	5	0		
	チ	1	1		
	ツ	5	3		
	テ	8	8	○	
	ト	2		×	完解
	ナ	2			
	ニ	1			
	ヌ	5			
	ネ	1			
	ノ	5			
	あなたの正解数 3問／8問				

大問番号	解答番号	正解	あなたの解答	正誤	備考
6 公式理解	ア	4			
	イ	1			
	ウ	3			
	エ	3			
	オ	4			
	カ	1			
	キ	2			
	ク	1			
	ケ	2			
	コ	4			
	サ	3			
	シ	2			
	ス	2			
	セ	4			
	ソ	2			
	タ	2			
	あなたの正解数 問／16問				
7 公式理解	ア	1	4	×	
	イ	3		×	
	ウ	1	3	×	
	エ	2	1	×	
	オ	1	3	×	
	カ	4	4	○	
	キ	3	3	○	
	ク	2	2	○	
	ケ	2	1	×	
	コ	2	2	○	
	サ	2	1	×	
	シ	2	2	○	
	ス	2	3	×	
	セ	1	1	○	
	ソ	2	2	○	
	タ	3	3	○	
	あなたの正解数 8問／16問				
8 公式利用	ア	—			完解
	イ	1			
	ウ	1			完解
	エ	2			
	オ	3			
	カ	2			完解
	キ	3			
	ク	2			完解
	ケ	—			
	コ	1			
	サ	5			
	シ	1			完解
	ス	3			
	セ	—			完解
	ソ	2			
	タ	4			
	チ	3			
	ツ	8			
	テ	9			
	ト	8			完解
	ナ	3			
	あなたの正解数 問／10問				

大問番号	解答番号	正解	あなたの解答	正誤	備考
9 公式利用	ア	1	4	×	完解
	イ	2	2		
	ウ	3	2		
	エ	2	3	×	完解
	オ	—	—		
	カ	1	4		
	キ	5	3		
	ク	—	—	×	完解
	ケ	2	2		
	コ	4	3		
	サ	3	4	×	
	シ	8	3	×	
	ス	8	3	×	完解
	セ	3	5		
	ソ	3	8	×	完解
	タ	4	6		
	チ	4			完解
	ツ	7			
	テ	1			完解
	ト	5			
	ナ	2			完解
	ニ	7			
	ヌ	4			
	ネ	7			
	あなたの正解数 0問／10問				
10 応用力	ア	5	5	○	完解
	イ	4	4		
	ウ	5	5		
	エ	3	3	×	完解
	オ	1	2		
	カ	3	6		
	キ	2	7		
	ク	2	5	×	完解
	ケ	2	3		
	コ	3	5		
	サ	5	1		
	シ	3	6		
	ス	7		×	完解
	セ	5			
	ソ	5			
	タ	2			
	チ	4	5	×	
	ツ	—	—	×	完解
	テ	9	3		
	ト	1		×	完解
	ナ	3			
	ニ	2		×	完解
	ヌ	3			
	あなたの正解数 1問／8問				

選んだ問題の枠内の正解数を足し，全体の正解率を計算してみましょう。

合計 ⓐ 27 問正解／全 ⓑ 68 問中⇨あなたの全体正解率（ⓐ÷ⓑ×100）＝ 40 %

学力アップに役立てよう!

解答は確認できましたか。
できなかった設問は「なぜ解けなかったのか，なぜ間違えたのか」をこの解説を読みながら確認しましょう。
自分のつまずきを知ることから次の一歩が始まります。

CONTENTS

●公式理解
ここでは，定理，公式，計算規則に関する知識についての学力を確認しています。

●公式利用
ここでは，必須の解法が，問題に応じて活用できるかどうかの学力を確認しています。

●応用力
ここでは，公式利用をふまえた応用問題に対する学力を確認しています。

大問番号 1　公式理解

公式確認

(1) 式の展開

$$\begin{cases}(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\end{cases}$$

(2) 絶対値

a を実数とする。

$$\begin{cases}a\geqq 0 \text{ のとき，} |a|=a\\ a<0 \text{ のとき，} |a|=-a\end{cases}$$

(3) 分母の有理化

分母の有理化では，$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ を利用する。

$a>0$，$b>0$，$a\neq b$ のとき，

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}\\[2ex]\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\end{cases}$$

(4) 1次不等式の解法

(i) 文字を含む項を一方の辺に，数の項を他方の辺に集めて $ax>b$（または，$ax<b$，$ax\geqq b$，$ax\leqq b$）の形にする。

(ii) 次のことに注意して，両辺を x の係数 a で割る。

① $a>0$ のとき，不等号の向きは変わらない。
② $a<0$ のとき，不等号の向きは反対になる。

解答

(1) ③

$(2x-1)^3$
$=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2-1^3$
$=8x^3-12x^2+6x-1$

(2) ③

$2\sqrt{2}=\sqrt{8}<\sqrt{9}=3$ より，
$2\sqrt{2}-3<0$
$\sqrt{2}<\sqrt{4}=2$ より，
$\sqrt{2}-2<0$
よって，
$|2\sqrt{2}-3|+|\sqrt{2}-2|$
$=-(2\sqrt{2}-3)-(\sqrt{2}-2)$
$=5-3\sqrt{2}$

(3) ②

$$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$$
$$=\frac{7-2\sqrt{21}+3}{7-3}$$
$$=\frac{10-2\sqrt{21}}{4}=\frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

(4) ④

$$-\frac{3}{4}x+\frac{1}{3}<\frac{x}{6}-\frac{5}{2}$$
両辺に 12 を掛けて
$$12\left(-\frac{3}{4}x+\frac{1}{3}\right)<12\left(\frac{x}{6}-\frac{5}{2}\right)$$
$-9x+4<2x-30$
$-11x<-34$
両辺を x の係数 -11（負の数）で割って，$x>\dfrac{34}{11}$

(5) 2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

とくに，2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は，

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

(5) ②

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}$$
$$=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

ここで，x の係数が2の倍数であるから，

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot1}}{2}$$
$$=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

としてもよい。

(6) 2次関数のグラフの平行移動

2次関数 $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると，$y=a(x-p)^2+q$ のグラフになる。

(6) ③

(7) 2次関数のグラフの頂点

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの頂点を求めるには，

① $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形する。
② 頂点は，点 $(p,\ q)$ である。

(7) ③

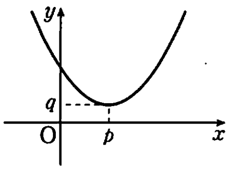
$$y=x^2-x-1$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$$
$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$$

頂点は，点 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{4}\right)$ である。

(8) 2次関数の最大・最小

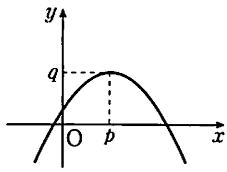
2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ について，

(i) $a>0$ のとき



・$x=p$ のとき，最小値 q。
・最大値はない。

(ii) $a<0$ のとき

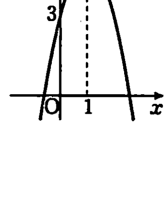


・$x=p$ のとき，最大値 q。
・最小値はない。

(8) ④

$$y=-2x^2+4x+3$$
$$=-2(x^2-2x)+3$$
$$=-2\{(x-1)^2-1^2\}+3$$
$$=-2(x-1)^2+5$$

となるから，$x=1$ で最大値5をとる。また，最小値はない。



(9) 2次関数のグラフと x 軸との位置関係

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，

$$\begin{cases} b^2-4ac>0 \text{ のとき，2個} \\ b^2-4ac=0 \text{ のとき，1個} \\ b^2-4ac<0 \text{ のとき，0個} \end{cases}$$

(9) ①

$4^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)$

$=16-24=-8<0$

より，共有点の個数は0個。

(10) 2次不等式の解

$\alpha<\beta$ とするとき，

2次不等式

$$\begin{cases} (x-\alpha)(x-\beta)>0 \text{ の解は，} x<\alpha,\ \beta<x \\ (x-\alpha)(x-\beta)<0 \text{ の解は，} \alpha<x<\beta \end{cases}$$

(10) ③

$x^2+3x-18\geqq 0$

$(x+6)(x-3)\geqq 0$

よって，

$x\leqq -6,\ 3\leqq x$

(11) $180^\circ-\theta$ の三角比

$0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，

$$\begin{cases} \sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta \\ \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta \\ \tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta \end{cases}$$

(11) ②

$\cos 125^\circ$

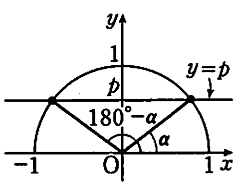
$=\cos(180^\circ-55^\circ)$

$=-\cos 55^\circ$

(12) $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のときの三角方程式の解

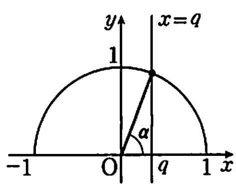
図の p，q について

$\sin\theta=p\ (0\leqq p\leqq 1)$



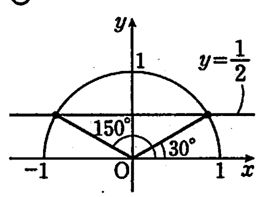
の解は，$\theta=\alpha$，$180^\circ-\alpha$

$\cos\theta=q\ (-1\leqq q\leqq 1)$



の解は，$\theta=\alpha$

(12) ②



(13) 正弦定理

△ABC において，BC $=a$，CA $=b$，AB $=c$，外接円の半径を R とすると，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(13) ③

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin 30^\circ}=2\cdot 2\sqrt{3}$ より，

$\mathrm{BC}=2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=2\sqrt{3}$

⑭ 余弦定理

△ABC において，BC＝a，CA＝b，AB＝c とすると，

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$

⑮ 三角形の面積

△ABC において，BC＝a，CA＝b，AB＝c，面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

⑯ 球の体積

半径 r の球の体積 V は，

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

⑭ ④

$$\begin{aligned} BC^2 &= 5^2+4^2 \\ &\quad -2\cdot5\cdot4\cdot\cos120^\circ \\ &= 25+16+20=61 \end{aligned}$$

BC＞0 より，BC＝$\sqrt{61}$

⑮ ②

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin135^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

⑯ ③

$$\frac{4}{3}\pi\cdot4^3=\frac{256}{3}\pi$$

大問番号 2　　公式理解

公式確認

(1) p.4 の大問番号1(3)と同様。

(2) p.4 の大問番号1(4)と同様。

(3) p.5 の大問番号1(5)と同様。

(4) p.5 の大問番号1(6)と同様。

(5) p.5 の大問番号1(8)と同様。

(6) p.6 の大問番号1(10)と同様。

(7) p.6 の大問番号1(12)と同様。

(8) p.6 の大問番号1(13)と同様。

(9) p.7 の大問番号1(14)と同様。

(10) p.7 の大問番号1(15)と同様。

(11) 順列

異なる n 個のものから，異なる r 個を取り出して一列に並べる方法は，全部で，

$${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n-r+1)}_{r\text{ 個の数の積}} \quad (\text{通り})$$

(12) 組合せ

異なる n 個のものから r 個を取り出す方法は，全部で，

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdot\cdots\cdots\cdot2\cdot1} \quad (\text{通り})$$

(13) 確率

各根元事象の起こり方が同様に確からしい1つの試行において，事象 A の起こる確率 $P(A)$ は，

$$P(A) = \frac{(\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数})}{(\text{起こりうるすべての場合の数})}$$

● 解答

(11) ①

$\boxed{A}$以外の5枚のカードを一列に並べる並べ方の数に等しいから，求める並べ方は，

$$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120(\text{通り})$$

(12) ①

特定の1人の生徒を除く6人から残りの委員2人を選べばよいので，選び方は，

$${}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15(\text{通り})$$

(13) ④

すべてのくじの引き方は，

$${}_{12}\mathrm{C}_2 = \frac{12\cdot11}{2\cdot1} = 66(\text{通り})$$

1本が当たりで1本がはずれであるくじの引き方は，

$${}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_8\mathrm{C}_1 = 4\cdot8 = 32(\text{通り})$$

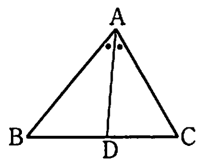
よって，求める確率は，

$$\frac{32}{66} = \frac{16}{33}$$

⒁ 三角形の角の二等分線と線分の比

△ABC の∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，

BD : DC = AB : AC



⒁ ②

BD : DC = AB : AC

= 5 : 10

= 1 : 2

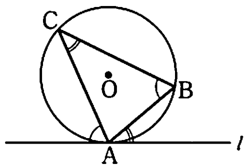
よって，

$$\mathbf{BD = BC \cdot \frac{1}{3}}$$

$$\mathbf{= 12 \cdot \frac{1}{3} = 4}$$

⒂ 接線と弦のつくる角の定理

円の弦と，その端点における接線がつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



⒂ ③

AT は接線であるから，接線と弦のつくる角の定理により，

∠ABC = ∠TAC = 35°

よって，△ABC において，

∠BAC = 180° − (35° + 45°)

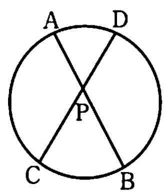
= 100°

⒃ 方べきの定理

円の 2 つの弦 AB，CD の交点を P とすると，

PA · PB = PC · PD

が成り立つ。



⒃ ③

方べきの定理

AP · BP = CP · DP

により，

3 · 6 = 5 · DP

よって， $\mathbf{DP = \frac{18}{5}}$

大問番号 3　公式利用

模範解答

(1)
$$x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3-2\sqrt{6}+2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=5-2\sqrt{6}$$
$$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=5+2\sqrt{6}$$

したがって，

$x+y=(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})=10$

$xy=(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=5^2-(2\sqrt{6})^2=1$

よって，$x^2-5xy+y^2=(x+y)^2-7xy$

$=10^2-7\cdot1$

$=$ **93**

◀$x^2-5xy+y^2$ を和 $x+y$ と積 xy だけで表す。
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
である。

(2) $\dfrac{x+5}{3}>2x-5$ を解くと，

$x+5>6x-15$

$-5x>-20$

よって，$x<4$ ……①

$|2x-9|<5$ を解くと，

$-5<2x-9<5$

$4<2x<14$

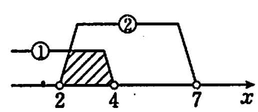
よって，$2<x<7$ ……②

①，②の共通範囲は，

$2<x<4$

◀両辺を -5 で割る。
不等号の向きが変わる。

◀a は正の定数とする。
$$\begin{cases}|x|>a \iff x<-a,\ a<x\\ |x|<a \iff -a<x<a\end{cases}$$

◀


(3) 2 次方程式 $x^2-(k+2)x+2k+9=0$ が重解をもつとき，

$(k+2)^2-4\cdot1\cdot(2k+9)=0$

$k^2-4k-32=0$

$(k+4)(k-8)=0$

$k>0$ より，**$k=8$**

◀2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつとき，
$b^2-4ac=0$
とくに，2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ が重解をもつとき，
$b'^2-ac=0$
を用いてもよい。

(4) $y=2x^2-4ax+a+1$

$=2(x-a)^2-2a^2+a+1$

となるから，グラフの頂点は，点$(a,\ -2a^2+a+1)$である。

頂点が直線 $y=3x-11$ 上にあるので，

$-2a^2+a+1=3a-11$

$2a^2+2a-12=0$

$a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

よって，$\boldsymbol{a=-3,\ 2}$

◀$x=a$，$y=-2a^2+a+1$ を $y=3x-11$ に代入する。

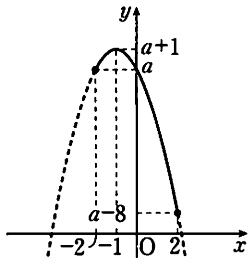
(5) $y=-x^2-2x+a$

$=-(x+1)^2+1+a$

となるから，$-2\leqq x\leqq 2$ において，y は $x=2$ のとき，最小値$a-8$をとる。

よって，$a-8=1$

$\boldsymbol{a=9}$



◀グラフは，上に凸。

(6) $y=x^2+3x-a$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，$x^2+3x-a=0$ の解であるから，

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+4a}}{2}$$

したがって，

$$AB=\frac{-3+\sqrt{9+4a}}{2}-\frac{-3-\sqrt{9+4a}}{2}$$

$$=\sqrt{9+4a}$$

$AB=4$ より，$\sqrt{9+4a}=4$

よって，$9+4a=16$

ゆえに，$\boldsymbol{a=\frac{7}{4}}$

◀$3^2-4\cdot1\cdot(-a)=9+4a$
$a>0$ であるから，$9+4a>0$

◀2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(7) $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(-2\sqrt{6})^2=25$ より，$\cos^2\theta=\dfrac{1}{25}$

$0°<\theta<180°$ で，$\tan\theta<0$ であるから，

$\cos\theta<0$

よって，$\boldsymbol{\cos\theta=-\frac{1}{5}}$

◀$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

◀$0°<\theta<90°$ のとき，
$\tan\theta>0$
$90°<\theta<180°$ のとき，
$\tan\theta<0$

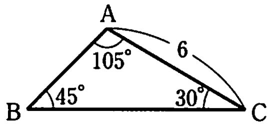
(8) $\angle C = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$

正弦定理により，$\dfrac{6}{\sin 45^\circ} = \dfrac{AB}{\sin 30^\circ}$

よって，$AB = \dfrac{6}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 30^\circ$

$= \dfrac{6}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \dfrac{1}{2} = 6\sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

$= \mathbf{3\sqrt{2}}$



◀正弦定理

$\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{CA}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} = 2R$

（ただし，R は△ABC の外接円の半径）

(9) $AC = x$ とおくと，余弦定理により，

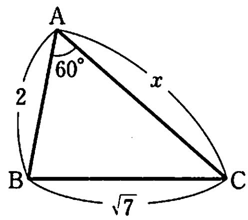
$(\sqrt{7})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$

よって，$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$

$x > 0$ より，$x = 3$

ゆえに，$AC = \mathbf{3}$



◀余弦定理

$BC^2 = AB^2 + CA^2 - 2AB \cdot CA \cos A$

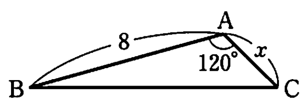
(10) $AC = x$ とする。

$\dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot x \cdot \sin 120^\circ = 6\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

よって，$x = 3$

ゆえに，$AC = \mathbf{3}$



◀△ABC の面積

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \sin A$

大問番号 4　公式利用

模範解答

(1)　p. 10 の大問番号3(2)と同様。
(2)　p. 10 の大問番号3(3)と同様。
(3)　p. 11 の大問番号3(4)と同様。
(4)　p. 11 の大問番号3(5)と同様。
(5)　p. 12 の大問番号3(9)と同様。
(6)　p. 12 の大問番号3(10)と同様。

(7)　男子 4 人が一列に並び，その間または両端の 5 カ所のうち 2 カ所に女子が並ぶと女子が隣り合わない。

◀並び方は，

男　男　男　男
∧　∧　∧　∧　∧
①　②　③　④　⑤

①～⑤のうち，2 カ所に女子が並ぶ。

男子 4 人が一列に並ぶ並び方は，$4! = 24$(通り)

女子 2 人の並び方は，${}_5P_2 = 20$(通り)

よって，求める並び方は，

$24 \cdot 20 = \mathbf{480}$(通り)

別解

男子 4 人，女子 2 人の計 6 人が一列に並ぶ並び方は，

$6! = 720$(通り)

このうち，女子 2 人が隣り合う並び方は，まず女子 2 人を 1 組と考えて，男子 4 人と並ぶ並び方は，

$5! = 120$(通り)

あり，さらに，女子 2 人の並び方は，2 通りあるので，女子 2 人が隣り合う並び方は，

$120 \times 2 = 240$(通り)

よって，女子 2 人が隣り合わない並び方は，

$720 - 240 = \mathbf{480}$(通り)

(8)　8 個の玉から 3 個の玉を取り出す方法は全部で，${}_8C_3$(通り)

◀すべての取り出し方の場合の数を考える。

赤玉が 2 個，白玉が 1 個である確率は，$\dfrac{{}_5C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_8C_3} = \dfrac{30}{56}$

赤玉が 1 個，白玉が 2 個である確率は，$\dfrac{{}_5C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_8C_3} = \dfrac{15}{56}$

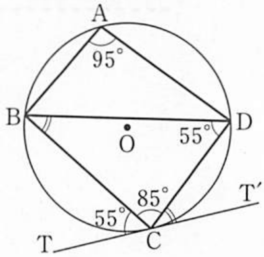
よって，求める確率は，

$\dfrac{30}{56} + \dfrac{15}{56} = \mathbf{\dfrac{45}{56}}$

◀排反事象の確率の加法定理

(9) CTは接線であるから，接線と弦のつくる角の定理により，

$\angle BCT = \angle BDC = 55°$



四角形ABCDが円に内接するから，

円に内接する四角形の性質により，

$\angle BCD + \angle BAD = 180°$

よって，$\angle BCD = 180° - 95°$

$= 85°$

ゆえに，

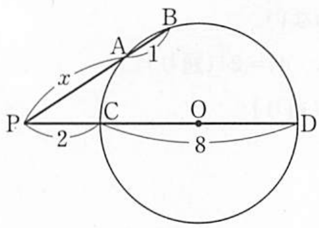
$\angle DCT' = 180° - (55° + 85°) = \mathbf{40°}$

◀$\angle DBC = \angle DCT'$ を利用して求めてもよい。

(10) $AP = x$ とすると，$BP = x + 1$

方べきの定理

$AP \cdot BP = CP \cdot DP$



により，

$x \cdot (x+1) = 2 \cdot 10$

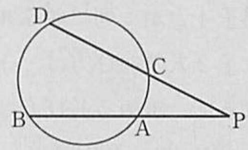
$x^2 + x - 20 = 0$

$(x+5)(x-4) = 0$

$x > 0$ より，$x = 4$

よって，$AP = \mathbf{4}$

◀方べきの定理



$\mathbf{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$

大問番号 5　応用力

模範解答

〔1〕(1)　$f(x)=x^2-4ax+6a$

$=(x^2-4ax+4a^2)-4a^2+6a$

$=(x-2a)^2-4a^2+6a$

であるから，関数 $y=f(x)$ のグラフの頂点は，

点 $(2a\,,\,-4a^2+6a)$ である。

◀2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフの頂点は，点 $(p,\ q)$ である。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，(1)より

$-4a^2+6a\leqq 0$

$2a^2-3a\geqq 0$

$a(2a-3)\geqq 0$

これを解いて，$a\leqq 0$，$a\geqq \frac{3}{2}$

a は正の定数であるから，$a\geqq \frac{3}{2}$ である。

◀2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，

$q\leqq 0$

別解

関数 $y=x^2-4ax+6a$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき

$(-4a)^2-4\cdot 1\cdot 6a\geqq 0$

$16a^2-24a\geqq 0$

$2a^2-3a\geqq 0$

$a(2a-3)\geqq 0$

これを解いて，$a\leqq 0$，$a\geqq \frac{3}{2}$

a は正の定数であるから，$a\geqq \frac{3}{2}$ である。

◀2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，

$b^2-4ac\geqq 0$

(3)(i)　(1)より，関数 $y=f(x)$ のグラフの頂点は，

点 $(2a\,,\,-4a^2+6a)$ である。

また，a は正の定数であるから

$0<2a<2a+3$

このことから，$0\leqq x\leqq 2a+3$ において，関数 $f(x)$ は

$x=2a$ のとき最小値 $-4a^2+6a$ をとる。

よって，$m=-4a^2+6a$ である。

◀軸が定義域の中にある。

$m=-10$ より，

$-4a^2+6a=-10$

$2a^2-3a-5=0$

$(a+1)(2a-5)=0$

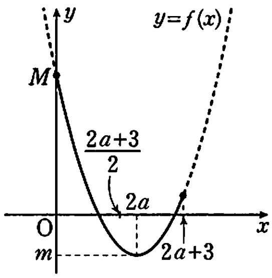
これを解いて，$a=-1,\ \frac{5}{2}$

a は正の定数であるから，$a=\frac{5}{2}$ である。

(ii) $a \geqq \frac{3}{2}$ であるから，

$\frac{2a+3}{2} \leqq 2a$

よって，関数 $f(x)$ は，$x=0$ のとき最大値をとり，$x=2a$ のとき最小値をとる。



◀軸が定義域内にあって，定義域の中央より右側にあるとき，軸の位置で最小，区間の左端（端点のうち軸より遠いほう）で最大。

よって，

$M=f(0)=6a$

$m=f(2a)=-4a^2+6a$

ここで，$a \geqq \frac{3}{2}$ であるから，

$6a>0$

$-4a^2+6a=-2a(2a-3) \leqq 0$

よって，

$|M|-|m|=6a-\{-(-4a^2+6a)\}$

$=-4a^2+12a$

◀$a \geqq 0$ のとき，$|a|=a$
$a<0$ のとき，$|a|=-a$

$|M|-|m|=4$ より，

$-4a^2+12a=4$

$a^2-3a+1=0$

これを解いて，

$$a=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

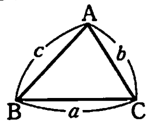
$a \geqq \frac{3}{2}$ であるから，$a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ である。

〔2〕(1) △ABC において，余弦定理により

$$BC^2 = 6^2 + 7^2 - 2\cdot 6\cdot 7\cdot\frac{1}{4}$$
$$= 64$$

BC > 0 より，**BC = 8** である。

◀余弦定理



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

また，$\cos A = \frac{1}{4}$ であり，$0° < A < 180°$ より $0 < \sin A \leqq 1$ であることから

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

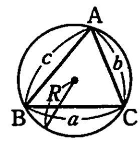
◀$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$R = \frac{8}{2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{16}{\sqrt{15}} = \mathbf{\frac{16\sqrt{15}}{15}}$$

◀正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



（R は外接円の半径）

(2) △BDC において，BC = 8，BD = 4，

$\cos\angle BDC = \cos\angle BAC = \frac{1}{4}$ であることから，CD = x とおくと余弦定理により

$$8^2 = 4^2 + x^2 - 2\cdot 4\cdot x\cdot\frac{1}{4}$$
$$x^2 - 2x - 48 = 0$$
$$(x+6)(x-8) = 0$$

これを解いて，$x = 8,\ -6$

$x > 0$ より，$x = 8$ である。

よって，**CD = 8** であり，BC = CD であることから，△BCD は二等辺三角形である。

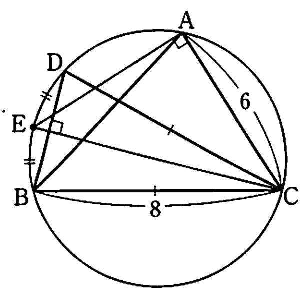
また，弧 BE = 弧 ED であることから

$$\angle BCE = \angle DCE$$

◀長さの等しい弧に対する円周角の大きさは等しい。

よって，二等辺三角形の性質から直線 CE は弦 BD の垂直二等分線である。

したがって，線分 CE は △ABC の外接円の直径となる。



◀二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に2等分する。

◀弦の垂直二等分線は円の中心を通る。

(1)より，$CE=\dfrac{32\sqrt{15}}{15}$ であり，$\triangle AEC$ は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$AE^2=CE^2-AC^2=\left(\frac{32\sqrt{15}}{15}\right)^2-6^2$$

$$=\frac{32^2}{15}-6^2$$

$$=\frac{1024-540}{15}$$

$$=\frac{484}{15}$$

$AE>0$ であるから，$\mathbf{AE=\dfrac{22\sqrt{15}}{15}}$ である。

大問番号 6　公式理解

公式確認

(1) 分数式の計算

分母が異なる分数式の加法・減法では，まず，分数式の分母を同じにしてから計算する。

いくつかの分数式の分母を同じにすることを通分という。分母が等しい分数式の加法・減法は，

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\quad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

(2) 2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

(3) 剰余の定理

整式 $P(x)$ を1次式 $x-\alpha$ で割ったときの余りは，$P(\alpha)$ である。

(4) 内分点の座標

m，n を正の数とする。2点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は，

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

解答

(1) ④

$$\frac{2}{x-5}-\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{2(x+3)}{(x-5)(x+3)}-\frac{x-5}{(x-5)(x+3)}$$
$$=\frac{(2x+6)-(x-5)}{(x-5)(x+3)}$$
$$=\frac{x+11}{(x-5)(x+3)}$$

(2) ①

$\alpha+\beta=-\frac{7}{2}$，$\alpha\beta=-\frac{3}{2}$ より，

$$\alpha+\alpha\beta+\beta$$
$$=(\alpha+\beta)+\alpha\beta$$
$$=-\frac{7}{2}+\left(-\frac{3}{2}\right)=-5$$

(3) ③

$P(x)=x^3+2x^2-8x+1$ とおくと，剰余の定理により，$x+1$ で割った余りは，

$$P(-1)$$
$$=(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)+1$$
$$=10$$

(4) ③

$$\left(\frac{1\cdot(-4)+3\cdot4}{3+1},\ \frac{1\cdot5+3\cdot(-7)}{3+1}\right)$$

すなわち，

$(2,\ -4)$

(5) 垂直条件

2直線 $y=m_1x+n_1$, $y=m_2x+n_2$ が垂直

$\Longleftrightarrow m_1m_2=-1$

(6) 点と直線の距離

点(x_1, y_1)と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は,

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(7) 不等式の表す領域

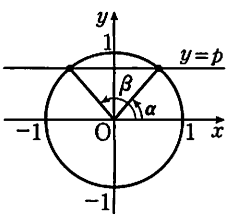
$\left\{\begin{array}{l}\text{不等式 } y>f(x) \text{ の表す領域は，座標平面上で，} y=f(x) \text{ の} \\ \text{グラフより上側の部分である。} \\ \text{不等式 } y<f(x) \text{ の表す領域は，座標平面上で，} y=f(x) \text{ の} \\ \text{グラフより下側の部分である。}\end{array}\right.$

(8) 三角方程式

$0\leqq\theta<2\pi$ において，図の p, q について

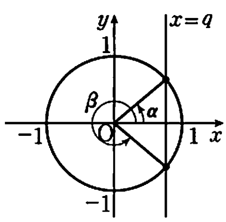
$\sin\theta=p$ のとき

$\theta=\alpha$, β



$\cos\theta=q$ のとき

$\theta=\alpha$, β



(5) ④

$4x-3y-1=0$ より，

$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$

垂直な直線の傾きを m とすると，

$\frac{4}{3}\cdot m=-1$ より，$m=-\frac{3}{4}$

点(1, 2)を通り，傾き$-\frac{3}{4}$の直線の方程式は，

$y-2=-\frac{3}{4}(x-1)$

すなわち，

$3x+4y-11=0$

(6) ①

$$d=\frac{|2-5+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

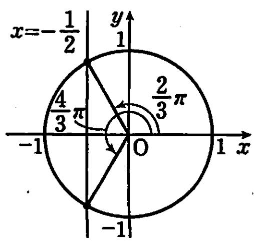
(7) ②

$3x+y>6$ より，$y>-3x+6$

よって，求める領域は，

$y=-3x+6$ のグラフより上側の部分である。

(8) ①



(9) 加法定理

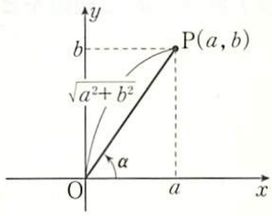
$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \end{cases}$$

(10) $a\sin\theta+b\cos\theta$ の変形

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし，$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$



(11) 指数関数

$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$ において，

$$\begin{cases} a>1 \text{ のとき，} & p<q \iff a^p<a^q \\ 0<a<1 \text{ のとき，} & p<q \iff a^p>a^q \end{cases}$$

(12) 対数の性質

$a>0,\ a\neq1,\ M>0,\ N>0$ とする。

$$\begin{cases} \log_a MN=\log_a M+\log_a N \\ \log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N \\ \log_a M^k=k\log_a M \end{cases}$$

(13) 対数関数

$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$ において，

$$\begin{cases} a>1 \text{ のとき，} & 0<p<q \iff \log_a p<\log_a q \\ 0<a<1 \text{ のとき，} & 0<p<q \iff \log_a p>\log_a q \end{cases}$$

(9) ②

$\sin75^\circ$

$=\sin(45^\circ+30^\circ)$

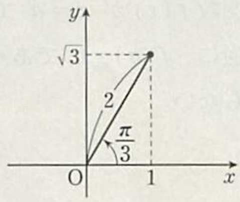
$=\sin45^\circ\cos30^\circ$

$\quad+\cos45^\circ\sin30^\circ$

$=\dfrac{\sqrt2}{2}\cdot\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac{\sqrt2}{2}\cdot\dfrac12$

$=\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$

(10) ④



(11) ③

$\left(\dfrac12\right)^x>\dfrac18$ より，$\left(\dfrac12\right)^x>\left(\dfrac12\right)^3$

底 $\dfrac12$ は1より小さいから，

$x<3$

(12) ②

$\log_3 45-\log_3 10+\log_3 6$

$=\log_3\dfrac{45\times6}{10}$

$=\log_3 27$

$=\log_3 3^3$

$=3$

(13) ②

真数 x は正であるから，

$x>0$ ……①

$\log_3 x<2$ より，

$\log_3 x<\log_3 3^2$

底3は1より大きいから，

$x<3^2$

すなわち，$x<9$ ……②

①，②より，$0<x<9$

(14) 接線の傾き

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは，

$$f'(a)$$

である。

(14) ④

$f(x)=x^3-3x^2+7$ とする。

$f'(x)=3x^2-6x$

点 $(-1, 3)$ における接線の傾きは，

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3\cdot(-1)^2-6\cdot(-1) \\ &= 9 \end{aligned}$$

(15) 関数の極値

関数 $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$f'(a)=0$ である。

逆に，$f'(a)=0$ であっても $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるとは限らない。

(15) ②

$f(x)=x^3+ax+4$

$f'(x)=3x^2+a$

$f(x)$ が $x=1$ で極値をとるので，

$f'(1)=0$

よって，$3\cdot 1^2+a=0$

ゆえに，$a=-3$

逆に，$a=-3$ のとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-3 \\ &= 3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると，$x=\pm 1$

$x<-1$，$x>1$ のとき，

$f'(x)>0$

$-1<x<1$ のとき，

$f'(x)<0$

となるので，$f(x)$ は $x=1$ で極値をとる。

(16) 不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき，

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C$$

ただし，C は積分定数

(16) ②

$$\begin{aligned} F(x) &= \int F'(x)\,dx \\ &= \int (3x^2-4x)\,dx \\ &= 3\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+C \\ &= x^3-2x^2+C \end{aligned}$$

$F(1)=1$ より，

$1^3-2\cdot 1^2+C=1$

よって，$C=2$

ゆえに，

$F(x)=x^3-2x^2+2$

大問番号 7　公式理解

公式確認

(1)　p. 19 の大問番号6(2)と同様。

(2)　p. 19 の大問番号6(3)と同様。

(3)　p. 20 の大問番号6(6)と同様。

(4)　p. 20 の大問番号6(7)と同様。

(5)　p. 20 の大問番号6(8)と同様。

(6)　p. 21 の大問番号6(10)と同様。

(7)　p. 21 の大問番号6(11)と同様。

(8)　p. 21 の大問番号6(12)と同様。

(9)　p. 22 の大問番号6(15)と同様。

(10)　p. 22 の大問番号6(16)と同様。

(11)　等差数列の和

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$S_n=\frac{n}{2}(a+a_n)=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$

(12)　等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$$\begin{cases} r=1 \text{ のとき，} S_n=na \\ r\neq 1 \text{ のとき，} S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1} \end{cases}$$

(13)　Σ の計算

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

解答

(11)　②

求める和は

$$S_{20}=\frac{20\{2\cdot5+(20-1)\cdot4\}}{2}$$
$$=10(10+76)$$
$$=860$$

(12)　②

求める和は

$$S_6=\frac{3\{1-(-2)^6\}}{1-(-2)}$$
$$=1-64$$
$$=-63$$

(13)　②

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+15^2$$
$$=\sum_{k=1}^{15}k^2$$
$$=\frac{1}{6}\cdot15\cdot(15+1)\cdot(2\cdot15+1)$$
$$=\frac{1}{6}\cdot15\cdot16\cdot31=1240$$

(14) 内分点，外分点の位置ベクトル

m，n を正の数とする。2 点 $\mathrm{A}\left(\vec{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\vec{b}\right)$ に対して，

線分 AB を $m:n$ に内分する点の位置ベクトルは，

$$\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

線分 AB を $m:n$ $(m \neq n)$ に外分する点の位置ベクトルは，

$$\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

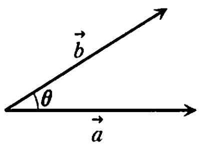
(14) ①

$$\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{4+3}=\frac{3\vec{a}+4\vec{b}}{7}$$

(15) ベクトルの内積

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とすると，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$



(15) ②

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=3\cdot2\cdot\cos120°\\&=3\cdot2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=-3\end{aligned}$$

(16) ベクトルの垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき，

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

(16) ③

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ より，

$$3\cdot x+(-1)\cdot4=0$$

よって，

$$x=\frac{4}{3}$$

大問番号 8

公式利用

模範解答

(1)　2次方程式 $2x^2-4x+3=0$ の2つの解が α，β であるから，

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=2,\quad \alpha\beta=\frac{3}{2}$$

よって，

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=2^3-3\cdot\frac{3}{2}\cdot2\\&=\mathbf{-1}\end{aligned}$$

◀2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解が α，β のとき，
$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

◀ $\alpha^3+\beta^3$
$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

(2)　$P(x)=x^3-5x^2+11x-7$ とおくと，

$$P(1)=1^3-5\cdot1^2+11\cdot1-7=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ。

右の割り算から，

$$P(x)=(x-1)(x^2-4x+7)$$

$$\begin{array}{r}x^2-4x\ +7\\ x-1\,\big)\,\overline{x^3-5x^2+11x-7}\\ \underline{x^3-\ \ x^2}\\ -4x^2+11x\\ \underline{-4x^2+\ \ 4x}\\ 7x-7\\ \underline{7x-7}\\ 0\end{array}$$

$P(x)=0$ とすると，

$$x-1=0,\quad x^2-4x+7=0$$

よって，$x=\mathbf{1}$，$\mathbf{2\pm\sqrt{3}\,i}$

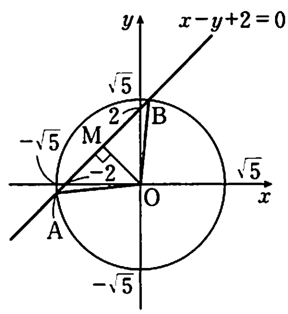
◀$P(\alpha)=0$
$\Longleftrightarrow$ 整式 $P(x)$ は $x-\alpha$ を因数にもつ

(3)　円 $x^2+y^2=5$ と直線 $x-y+2=0$ の2つの交点がA，Bであるから，線分ABの中点をMとすると，

$$\mathrm{OM}\perp\mathrm{AB}$$

ここで，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\sqrt{5}$ であり，

$$\mathrm{OM}=\frac{|0-0+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$$



であるから，求める線分の長さは，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=2\mathrm{AM}\\&=2\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{OM}^2}\\&=2\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}\\&=\mathbf{2\sqrt{3}}\end{aligned}$$

◀点O(0, 0)と直線 $x-y+2=0$ の距離は，OMの長さに等しい。

◀△OAMは直角三角形より，
$\mathrm{OA}^2=\mathrm{OM}^2+\mathrm{AM}^2$

(4) 点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。

$2AP^2+BP^2=45$ から，

$$2\{(x-4)^2+(y+2)^2\}+\{(x+2)^2+(y-1)^2\}=45$$

$$2(x^2+y^2-8x+4y+20)+(x^2+y^2+4x-2y+5)=45$$

$$3x^2+3y^2-12x+6y=0$$

$$x^2+y^2-4x+2y=0$$

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5$$

よって，点Pの軌跡は，

中心 $(2,\ -1)$，半径 $\sqrt{5}$ の円である。

◀求める軌跡上の点の座標を例えば $(x,\ y)$ とおき，x と y の関係式を求める。

(5) $3\cos 2\theta-11\cos\theta+6=0$ より，

$$3(2\cos^2\theta-1)-11\cos\theta+6=0$$

$$6\cos^2\theta-11\cos\theta+3=0$$

$$(3\cos\theta-1)(2\cos\theta-3)=0$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$ より，$2\cos\theta-3<0$

よって，$3\cos\theta-1=0$

$$\cos\theta=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

◀2倍角の公式
$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

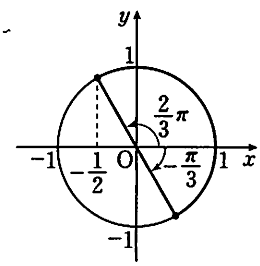
(6) $0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$-\frac{\pi}{3}\leqq\theta-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi$

よって，$-\frac{1}{2}\leqq\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 1$

したがって，

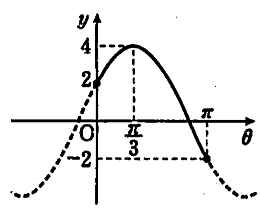
$$-2\leqq 4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\leqq 4$$

ゆえに，$\mathbf{-2\leqq y\leqq 4}$



◀角の範囲より，とりうる値の変域に注意する。

◀$y=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$ のグラフ



(7) $2\cdot 2^{2x}-11\cdot 2^x-40=0$ において，$t=2^x$ とおくと，

$$2t^2-11t-40=0$$

$$(2t+5)(t-8)=0$$

$t>0$ であるから，$2t+5>0$

よって，$t-8=0$ より，$t=8$

したがって，$2^x=8=2^3$

ゆえに，$\mathbf{x=3}$

◀$2^{2x}=(2^x)^2$
$2^x>0$ に注意。

(8) 対数の真数は正の数であるから，

$x>0$，$x-7>0$　ゆえに，$x>7$ ……①

$\log_2 x+\log_2(x-7)=3$

$\log_2 x(x-7)=\log_2 2^3$

よって，$x(x-7)=2^3$

$x^2-7x-8=0$

$(x+1)(x-8)=0$

①より，$x=\mathbf{8}$

◀$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ とする。
$\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

◀$\log_a M=\log_a N \Longleftrightarrow M=N$

(9) $f(x)=x^3-9x^2+15x+2$ より

$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$f'(x)=0$ とすると，$x=1$，5

$f(x)$ の増減表は，次のようになる。

◀増減表をかいて考える。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

したがって，$x=1$ のとき，極大となり，極大値は，

$f(1)=1^3-9\cdot1^2+15\cdot1+2=\mathbf{9}$

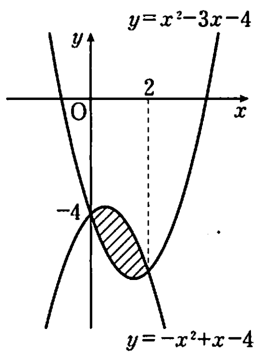
(10) $x^2-3x-4=-x^2+x-4$ とおくと，

$2x^2-4x=0$

$x^2-2x=0$

$x(x-2)=0$

$x=0$，2



これが 2 つの放物線の交点の x 座標である。

区間 $0\leqq x\leqq 2$ で，

$-x^2+x-4\geqq x^2-3x-4$

であるから，求める面積 S は，

$$S=\int_0^2\{(-x^2+x-4)-(x^2-3x-4)\}dx$$

$$=\int_0^2(-2x^2+4x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

$\boxed{\text{別解}}$ $S=\int_0^2\{(-x^2+x-4)-(x^2-3x-4)\}dx$

$$=-2\int_0^2 x(x-2)dx=-2\left\{-\frac{1}{6}(2-0)^3\right\}=\mathbf{\frac{8}{3}}$$

◀ $\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

大問番号 9　公式利用

模範解答

(1) p. 25 の大問番号8(2)と同様。

(2) p. 26 の大問番号8(4)と同様。

(3) p. 26 の大問番号8(6)と同様。

(4) p. 26 の大問番号8(7)と同様。

(5) p. 27 の大問番号8(8)と同様。

(6) p. 27 の大問番号8(10)と同様。

(7) この数列の第 n 項を a_n とすると，

$$a_n = 100 + (n-1)\cdot(-3) = -3n + 103$$

$a_n \geqq 0$ とおくと，$-3n + 103 \geqq 0$

$$n \leqq \frac{103}{3} = 34.33\cdots$$

よって，この数列の初項から第 34 項までが正で，第 35 項以降が負であるから，初項から第 34 項までの和が最大である。

ゆえに，$n = \mathbf{34}$ である。

◀初項 a，公差 d の等差数列の第 n 項を a_n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$\begin{cases} a_n = a + (n-1)d \\ S_n = \dfrac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} \end{cases}$$

◀負の項を加えると和は減少する。

(8) $n \geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - 5n) - \{2(n-1)^2 - 5(n-1)\} \\ &= (2n^2 - 5n) - (2n^2 - 9n + 7) \\ &= 4n - 7 \end{aligned}$$

また，$a_1 = S_1 = 2\cdot1^2 - 5\cdot1 = -3$

よって，$a_n = 4n - 7$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，$a_n = \mathbf{4n - 7}$

◀数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，

$$\begin{cases} \cdot\ n = 1 \text{ のとき，} a_1 = S_1 \\ \cdot\ n \geqq 2 \text{ のとき，} \\ \quad a_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$

(9) $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=4\cdot(\sqrt{2})^2-4\cdot(-1)+(\sqrt{3})^2$

$=8+4+3=15$

$|2\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$ より，$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\mathbf{15}}$

◀ $|s\vec{a}+t\vec{b}|^2$
$=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$
$=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

(10) 点 D は辺 AB を 2:1 に内分するので，

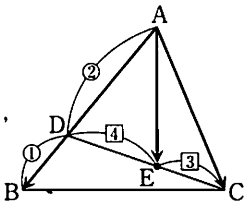
$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

点 E は線分 CD を 3:4 に内分するので，

$\overrightarrow{AE}=\frac{3\overrightarrow{AD}+4\overrightarrow{AC}}{7}$

$=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$

$=\mathbf{\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}}$



◀線分 AB を $m:n$ に内分する点を P とすると，

$\overrightarrow{OP}=\frac{n\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}}{m+n}$

大問番号 10　応用力

模範解答

〔1〕(1) 円 $C: x^2+y^2-10x-8y+16=0$ を変形して

$$x^2-10x+25+y^2-8y+16=25$$

$$(x-5)^2+(y-4)^2=5^2$$

よって，円 C の中心は $(5,\ 4)$，半径は 5 である。

(2) 3点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ -2)$，P$(s,\ t)$ を頂点とする △OAP の重心 G の座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{0+1+s}{3},\ y=\frac{0+(-2)+t}{3}$$

すなわち

$$s=3x-1,\ t=3y+2 \quad \cdots\cdots ①$$

点 P$(s,\ t)$ が円 C 上にあることから

$$(s-5)^2+(t-4)^2=5^2 \quad \cdots\cdots ②$$

①を②に代入して

$$\{(3x-1)-5\}^2+\{(3y+2)-4\}^2=5^2$$

$$(3x-6)^2+(3y-2)^2=25$$

$$(x-2)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

よって，点 G は円 $(x-2)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点 G$(x,\ y)$ は条件を満たす。

したがって，求める軌跡は点 $\left(2,\ \frac{2}{3}\right)$ を中心とする半径 $\frac{5}{3}$ の円である。

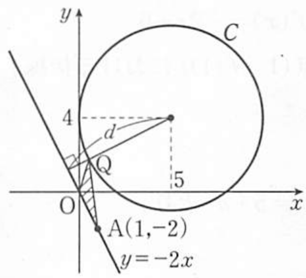
◀点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ である。

◀3点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ である。

(3) 直線OAの方程式は

$$y=-2x$$

である。



△OAQ の面積が最小になるのは，辺OAを底辺と考えたときの高さが最小となるときである。

直線OAと円 C の中心との距離を d とすると

$$d=\frac{|2\cdot5+1\cdot4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}$$

したがって，△OAQ の辺OAを底辺としたときの高さの最小値は

$$d-5=\frac{14}{\sqrt{5}}-5$$

であり，

$$\mathrm{OA}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

であるから，△OAQ の面積の最小値は

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\left(\frac{14}{\sqrt{5}}-5\right)=\mathbf{7-\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

である。

◀点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◀円上の点と直線との距離の最小値は，中心と直線との距離から半径を引いたもの。

〔2〕 $f(x)=-x^2+6x+a$ より，$f'(x)=-2x+6$

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点$(1,\ f(1))$における接線 l の傾きは

$$f'(1)=-2\cdot1+6=4$$

であり，接線 l の方程式は，$f(1)=5+a$ より，

$$y-(5+a)=4(x-1)$$

すなわち

$$l : y=4x+a+1$$

である。

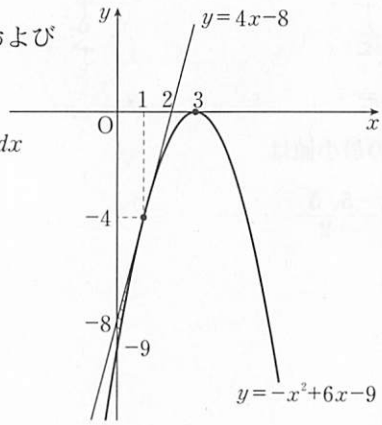
接線 l が点$(0,\ -8)$ を通るとき

$$-8=a+1$$

より，$\boldsymbol{a=-9}$ である。

このとき，$f(x)=-x^2+6x-9$ であり，接線 l の方程式は $y=4x-8$ である。

接線 l と放物線 $y=f(x)$ および y 軸で囲まれた部分の面積は



$$\int_0^1\{4x-8-(-x^2+6x-9)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}-1+1=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

次に，

$$f(x)=-x^2+6x-9=-(x-3)^2$$

であることから，放物線 $y=f(x)$ は点$(3,\ 0)$ で x 軸に接する。

また，接線 l と x 軸との交点は点$(2,\ 0)$ であることから，接線 l と放物線 $y=f(x)$ および x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_1^3\{-(-x^2+6x-9)\}dx-\frac{1}{2}(2-1)\cdot4$$

$$=\int_1^3(x^2-6x+9)\,dx-\frac{1}{2}\cdot1\cdot4$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_1^3-2$$

$$=\left(\frac{27}{3}-27+27\right)-\left(\frac{1}{3}-3+9\right)-2$$

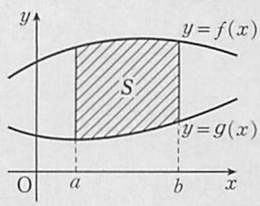
$$=9-\frac{1}{3}+3-9-2=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

◀関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点$(a,\ f(a))$における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

◀$a\leqq x\leqq b$ の範囲で，$g(x)\leqq f(x)$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび2直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$



◀x 軸と $y=f(x)$ と $x=1$ で囲まれる部分の面積から，三角形の面積をひけばよい。